

4. Anhang

Algorithmus 4.1 zur Bestimmung von Teilerfremden

Wir definieren ein **Sieb zu Teilerfremden** rekursiv.

- $\rightarrow T_2$ Es ist $T_2 = \{1, 5\}$ die Menge aller Teilerfremden zu $6=3 \cdot 2 = \pi_2$ im Intervall $[1; 6]$.
- $T_2 \rightarrow T_3$ Wir bilden $\underline{T}_3 = \{t+k \cdot 6 \mid t \in T_2, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 5\}$ und erhalten $\underline{T}_3 = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29\}$.
Aus \underline{T}_3 eliminieren wir nun alle Elemente $t \cdot 5$ für $t \in T_2$, was uns die Menge $T_3 = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ aller Teilerfremden zu $30=5 \cdot 3 \cdot 2 = \pi_3$ im Intervall $[1; 30]$ erhalten lässt.
- $T_n \rightarrow T_{n+1}$ Es sei $T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_{\tau_n}\}$ die Menge aller Teilerfremden zu π_n im Intervall $[1; \pi_n]$.
Wir bilden $\underline{T}_{n+1} = \{t+k \cdot \pi_n \mid t \in T_n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < p_{n+1}\}$ und erhalten
- $$\underline{T}_{n+1} = \left\{ \begin{array}{cccc} t_1 & , & t_2 & , \dots , t_{\tau_n} & , \\ t_1 + \pi_n & , & t_2 + \pi_n & , \dots , t_{\tau_n} + \pi_n & , \\ t_1 + 2 \cdot \pi_n & , & t_2 + 2 \cdot \pi_n & , \dots , t_{\tau_n} + 2 \cdot \pi_n & , \\ \dots & & \dots & & \dots \\ t_1 + (p_{n+1}-1) \cdot \pi_n & , & t_2 + (p_{n+1}-1) \cdot \pi_n & , \dots , t_{\tau_n} + (p_{n+1}-1) \cdot \pi_n & \end{array} \right\}$$
- Aus \underline{T}_{n+1} eliminieren wir nun alle Elemente $t \cdot p_{n+1}$ für $t \in T_n$, was uns die Menge $T_{n+1} = \{\hat{t}_1, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_{\tau_{n+1}}\}$ aller Teilerfremden zu π_{n+1} im Intervall $[1; \pi_{n+1}]$ erhalten lässt.

Unser Sieb ist so ausgelegt, dass jede Spalte von \underline{T}_{n+1} in der Darstellung oberhalb genau einmal durch $t \cdot p_{n+1}$ getroffen wird. Dies führt zum Resultat von Satz 1.2.

Dass die Elemente der Menge T_n symmetrisch angeordnet sind, d.h. es gilt $t_i + t_{\tau_n+1-i} = \pi_n$ für alle $1 \leq i \leq \tau_n/2$, finden wir erwähnenswert.

Algorithmus 4.2 zur Bestimmung von Teilerfremd-Zwillingen

Wir definieren ein **Sieb zu Teilerfremd-Zwillingen** rekursiv.

- $\rightarrow Z_2$ Es sei $Z_2 = \{1\}$ die Menge aller Teilerfremd-Zwillinge zu $6=3 \cdot 2 = \pi_2$ im Intervall $[1; 6]$.
- $Z_2 \rightarrow Z_3$ Wir bilden $\underline{Z}_3 = \{z+k \cdot 6 \mid z \in Z_2, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 5\}$ und erhalten $\underline{Z}_3 = \{1, 7, 13, 19, 25\}$.
Aus \underline{Z}_3 eliminieren wir nun alle Elemente $z \cdot 5$ sowie $(6-z) \cdot 5$ für $z \in Z_2^*$ mit $Z_2^* = \{5\}$, was uns die Menge $Z_3 = \{1, 13, 19\}$ aller Teilerfremd-Zwillinge zu $30=5 \cdot 3 \cdot 2 = \pi_3$ im Intervall $[1; 30]$ erhalten lässt.
- $Z_n \rightarrow Z_{n+1}$ Es sei $Z_n = \{z_1, z_2, \dots, z_{\zeta_n}\}$ die Menge aller Teilerfremd-Zwilling zu π_n im Intervall $[1; \pi_n]$. Ergänzend zu Z_n notieren wir $Z_n^* = \{z^* \mid z \cdot p_{n+1}^{\tau_n-1} \equiv z^* \pmod{\pi_n}, z \in Z_n\}$.
Wir bilden $\underline{Z}_{n+1} = \{z+k \cdot \pi_n \mid z \in Z_n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < p_{n+1}\}$ und erhalten
- $$\underline{Z}_{n+1} = \left\{ \begin{array}{cccc} z_1 & , & z_2 & , \dots , z_{\zeta_n} & , \\ z_1 + \pi_n & , & z_2 + \pi_n & , \dots , z_{\zeta_n} + \pi_n & , \\ z_1 + 2 \cdot \pi_n & , & z_2 + 2 \cdot \pi_n & , \dots , z_{\zeta_n} + 2 \cdot \pi_n & , \\ \dots & & \dots & & \dots \\ z_1 + (p_{n+1}-1) \cdot \pi_n & , & z_2 + (p_{n+1}-1) \cdot \pi_n & , \dots , z_{\zeta_n} + (p_{n+1}-1) \cdot \pi_n & \end{array} \right\}$$
- Aus \underline{Z}_{n+1} eliminieren wir nun alle Elemente $z \cdot p_{n+1}$ sowie $(\pi_n - z) \cdot p_{n+1} + 2$ für $z \in Z_n^*$, was uns die Menge
- $Z_{n+1} = \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_{\zeta_{n+1}}\}$ aller Teilerfremd-Zwilling zu π_{n+1} im Intervall $[1; \pi_{n+1}]$ erhalten lässt.

Zur Bestimmung von Z_n^* haben wir zu p_{n+1} den Exponenten τ_n-1 notiert, da $p_{n+1}^{\tau_n} \equiv 1 \pmod{\pi_n}$ gilt.

Für $n > 2$ gibt es aber stets kleinere Exponenten $e < \tau_n$, wobei e Faktor von τ_n sein muss, damit $p_{n+1}^e \equiv 1 \pmod{\pi_n}$ gilt, also zum Rest 1 führt.

Durch $z \cdot p_{n+1}$ sowie $(\pi_n - z) \cdot p_{n+1} + 2$ werden aus jeder Spalte von \underline{Z}_{n+1} in der Darstellung oberhalb genau zwei Elemente eliminiert. Dies führt zum Resultat von Satz 2.1.

Die Elemente der Menge Z_n sind (abgesehen von der Sonderstellung der 1) symmetrisch angeordnet, d.h. es gilt $z_i + z_{\zeta_n + 1 - i} = \pi_n + 2$ für alle $1 < i \leq \zeta_n / 2$. Auch dies erwähnen wir ohne weiteren Bezug zu nehmen.

Wenden wir uns nun den Lücken im Einzelnen zu und zwar über eine Statistik. Mit den bereits oberhalb zitierten Computerprogrammen haben wir bestimmt, wie häufig Lücken zwischen Teilerfremden zu π_n der Länge 2, 4, 6, ... im jeweiligen Intervall $[1; \pi_n]$ auftreten.

n	Intervall	Summe der Lücken	Lückenlänge						
			2	4	6	8	10	12	14
2	6	2	1	1					
3	30	8	3	3	2				
4	210	48	15	15	14	2	2		
5	2310	480	135	135	142	28	30	8	2
6	30030	5760	1485	1485	1690	394	438	188	58
7	510510	92160	22275	22275	26630	6812	7734	4096	1406
8	9699690	1658880	378675	378675	470630	128810	148530	90124	33206
9	223092870	36495360	7952175	7952175	10169950	2918020	3401790	2255792	871318
10	6469693230	1021870080	214708725	214708725	280323050	83120450	97648950	68713708	27403082

Die Gesetzmäßigkeiten der Werte in den ersten Spalten sind offensichtlich, mit Spalte 6 wird es komplexer.

Intervall	Summe der Lücken	2	4
$I(n) = \prod_{i=1}^n p_i$	$S(n) = \prod_{i=1}^n (p_i - 1)$	$L_2(n) = \prod_{i=2}^n (p_i - 2)$	$L_4(n) = \prod_{i=2}^n (p_i - 2)$

Mit rekursiven Notationen kommen wir allerdings weiter.

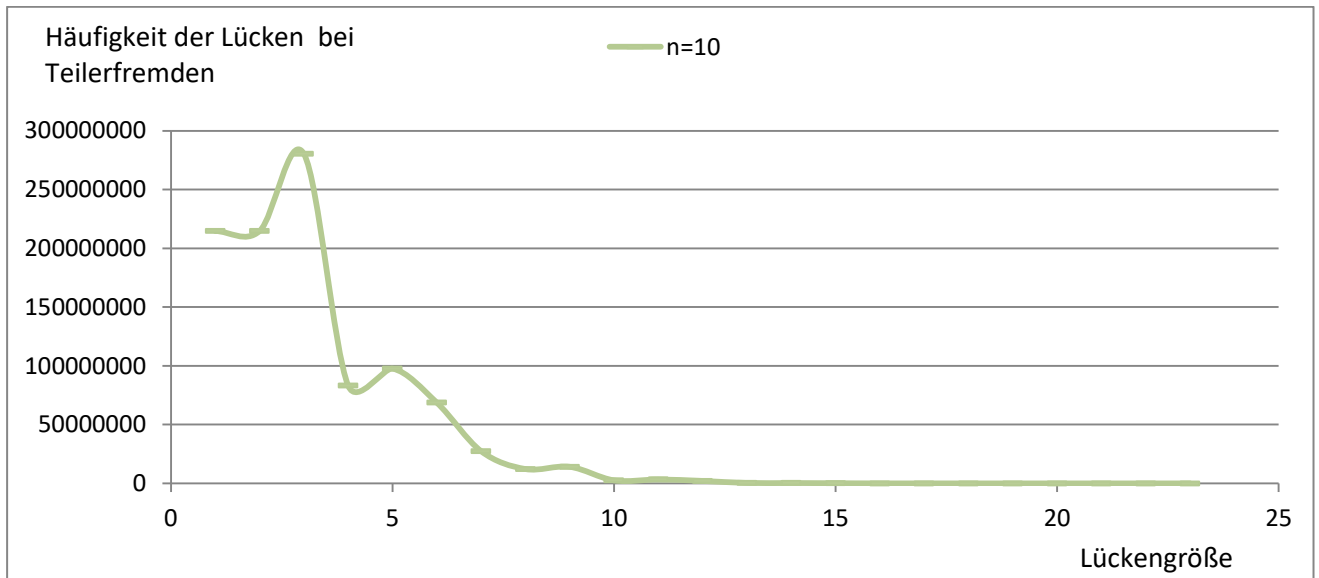
Intervall	Summe der Lücken	2	4	6	8
$a_1=2$ $I(n) = a_n$ $a_i = a_{i-1} * p_i$	$a_1=1$ $S(n) = a_n$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 1)$	$a_2=1$ $L_2(n) = a_n$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 2)$	$a_2=1$ $L_4(n) = a_n$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 2)$	$a_3=2, b_4=4$ $L_6(n) = a_n$ $b_i = b_{i-1} * (p_{i-1} - 3)$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 2) + b_i$	$a_4=2, b_5=10, c_5=2$ $L_8(n) = a_n$ $c_i = c_{i-1} * (p_{i-2} - 4)$ $b_i = b_{i-1} * (p_{i-1} - 3) + c_i$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 2) + b_i$

10	12	14
$a_4=2, b_5=12, c_5=4$ $L_{10}(n) = a_n$ $c_i = c_{i-1} * (p_{i-2} - 4)$ $b_i = b_{i-1} * (p_{i-1} - 3) + c_i$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 2) + b_i$	$a_5=8, b_6=100, c_7=36, d_7=12$ $L_{12}(n) = a_n$ $d_i = d_{i-1} * (p_{i-3} - 5)$ $c_i = c_{i-1} * (p_{i-2} - 4) + d_i$ $b_i = b_{i-1} * (p_{i-1} - 3) + c_i$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 2) + b_i$	$a_5=2, b_6=36, c_7=20, d_7=18$ $L_{14}(n) = a_n$ $d_i = d_{i-1} * (p_{i-3} - 5)$ $c_i = c_{i-1} * (p_{i-2} - 4) + d_i$ $b_i = b_{i-1} * (p_{i-1} - 3) + c_i$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 2) + b_i$

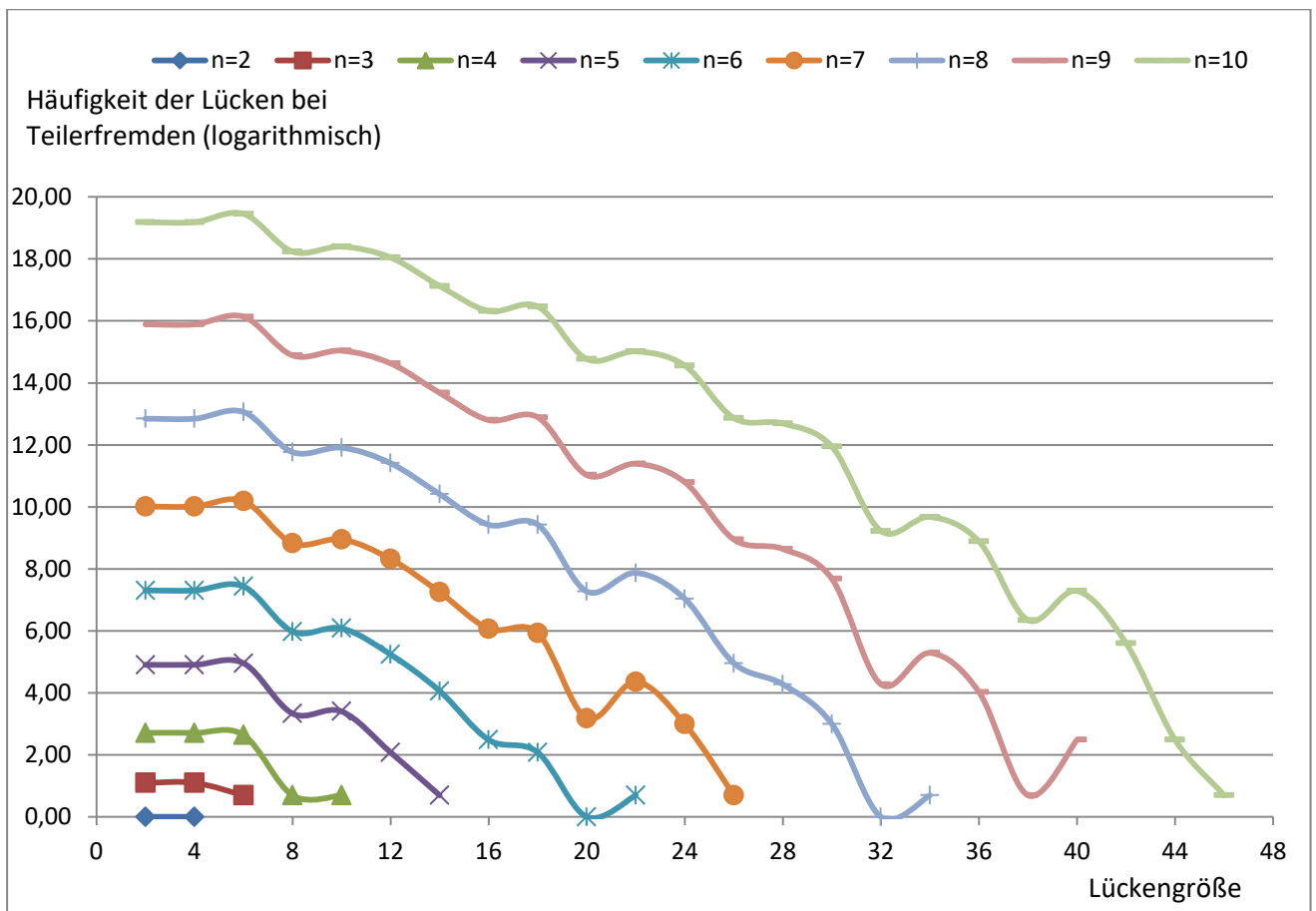
Die Rekursionsvorschriften sind von einfacher Bauart und lassen sich auch auf nachfolgende Spalten beliebig fortsetzen. Schwieriger erweist sich die Bestimmung der Startwerte.

Würde es gelingen die Startwerte formelmäßig zu erfassen, so könnte man insbesondere auf den jeweils größten Lückenwert im Intervall schließen.

Die Häufigkeiten, mit denen die Lücken auftreten, haben wir einmal exemplarisch für die Reihe $n=10$ grafisch erfasst.



Die übrigen Reihen zeigen ähnliche Muster. Wir machen die Reihen vergleichbar darstellbar, indem wir die Vertikalachse logarithmisch anlegen.



Aus den zu Tage tretenden Eigenschaften lassen sich eventuell Rückschlüsse auf größtmögliche Lücken im Intervall ziehen. Dieses Vorhaben wird allerdings erst bei Teilerfremd-Zwillingspaaren aufzugreifen sein.

Mit zitierten Computerprogrammen haben wir nun ebenfalls bestimmt, wie häufig Lücken zwischen Teilerfremd-Zwillingspaaren zu π_n der Länge 6, 12, 18, ... im jeweiligen Intervall $[1; \pi_n]$ auftreten.

n	Intervall	Summe der	Lückenlänge						
		Lücken	6	12	18	24	30	36	42
2	6	1	1						
3	30	3	1	2					
4	210	15	3	8	2	0	2		
5	2310	135	21	56	22	6	22	4	4
6	30030	1485	189	504	238	96	270	60	84
7	510510	22275	2457	6552	3374	1536	4230	1022	1406
8	9699690	378675	36855	98280	53690	26208	72378	18776	34812
9	223092870	7952175	700245	1867320	1060150	539136	1500318	393464	801540
10	6469693230	214708725	17506125	46683000	27184430	14178528	39735054	10497320	22680468

Die Gesetzmäßigkeiten der Werte in den ersten Spalten sind leicht einsehbar.

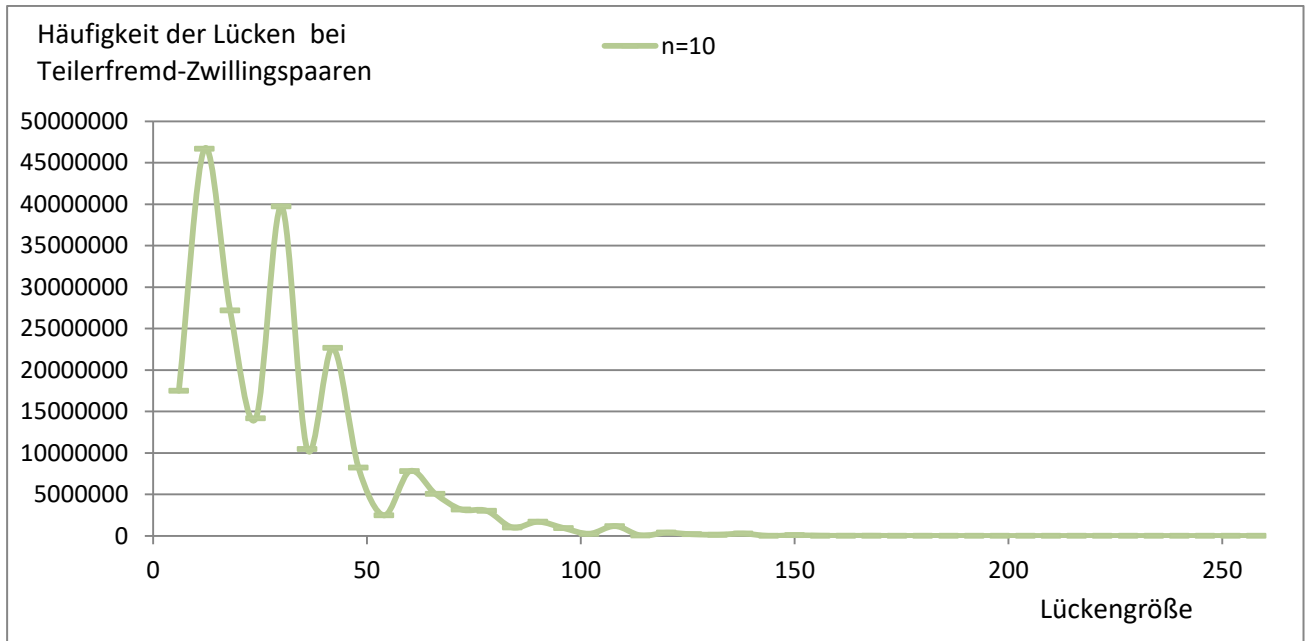
Intervall	Summe der Lücken	6	12
$I^Z(n) = \prod_{i=1}^n p_i$	$S^Z(n) = \prod_{i=2}^n (p_i - 2)$	$L^Z_6(n) = \prod_{i=3}^n (p_i - 4)$	$L^Z_{12}(n) = \prod_{i=3}^n (p_i - k)$ mit $\begin{cases} k = 3 \text{ für } i \leq 4 \\ k = 4 \text{ für } i > 4 \end{cases}$

Mit rekursiven Notationen kommen wir allerdings weiter.

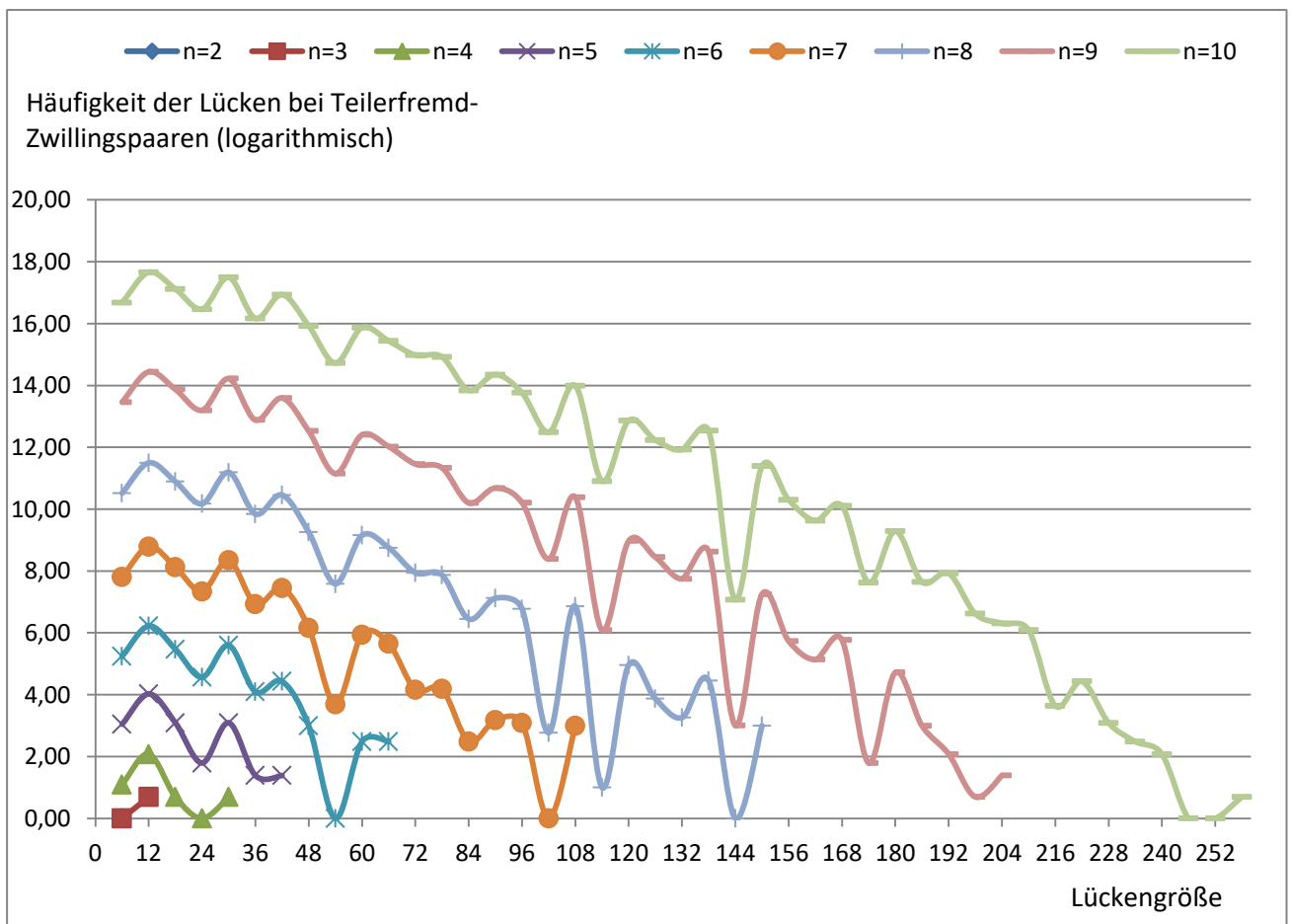
Intervall	Summe der Lücken	6	12	18	24
$a_1=2$ $I^Z(n) = a_n$ $a_i = a_{i-1} * p_i$	$a_1=1$ $S^Z(n) = a_n$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 2)$	$a_2=1$ $L^Z_6(n) = a_n$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 4)$	$a_3=2, a_4=8$ $L^Z_{12}(n) = a_n$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 4)$	$a_4=2, b_5=8$ $L^Z_{18}(n) = a_n$ $b_i = b_{i-1} * (p_{i-1} - 6)$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 4) + b_i$	$a_4=0, a_5=6, b_6=42, b_7=288$ $L^Z_{24}(n) = a_n$ $b_i = b_{i-1} * (p_{i-1} - 6)$ $a_i = a_{i-1} * (p_i - 4) + b_i$

Die Rekursionsvorschriften sind wiederum von einfacher Bauart und lassen sich (allerdings nicht mehr ganz so leicht) auf nachfolgende Spalten fortsetzen.

Die Häufigkeiten, mit denen die Lücken auftreten, haben wir nun auch zu Teilerfremd-Zwillingspaaren exemplarisch für die Reihe n=10 grafisch erfasst.



Die Hochpunkte scheinen auf Graphen von Exponentialfunktionen oder gar Gaußschen Glockenkurven zu liegen.
Die übrigen Reihen zeigen erwartungsgemäß ähnliche Muster. Um vergleichen zu können haben wir die Vertikalachse wieder logarithmisch angelegt.



Eventuell lassen sich aus diesen und noch zu entdeckenden Eigenschaften Rückschlüsse auf mögliche maximale Lücken im Intervall ziehen.